

ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА. ПЕРВАЯ ЛИГА, ФИНАЛ лига, 4 тур
РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ДЛЯ ЖЮРИ.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

Конкурс капитанов. Числа от 1 до 1000 разбиты на 100 десятков: от 1 до 10, от 11 до 20, ..., от 991 до 1000. Сколько десятков содержат по два кратных 7?

Ответ: 42.

1. Две правильные семиугольные звезды вписаны в фиксированную окружность. Докажите, что отношение площади к периметру их объединения не зависит от расположения звезд.

Решение. Пусть объединение это многоугольник $A = X_1X_2 \dots X_k$. Докажем, что $S(A)/P(A) = 2r$, где r — расстояние от центра окружности O до каждого из лучей звезд. Для этого проведем все отрезки вида OX_i и разобьем тем самым многоугольник в объединение треугольников OX_iX_{i+1} . Площадь такого треугольника равна $r \cdot X_iX_{i+1}/2$, откуда следует требуемое.

В этом решении есть недочет: нужно еще доказать, почему площади треугольников именно складываются, а не вычитаются. Есть много способов это доказать, приведем следующий. Изучим более внимательно, как устроены треугольники. Пусть одна звездочка это $A_1B_1A_2B_2 \dots A_7B_7$, где A_i — точки на окружности, а другая это $C_1D_1 \dots C_7D_7$, где C_i — на дугах A_iA_{i+1} . Представим вторую звездочку в виде объединения четырехугольников $OD_{i-1}C_iD_i$. Пусть $D_{i-1}C_i$ пересекает A_iB_i в точке E_i , а B_iA_{i+1} пересекает C_iD_i в точке F_i . Тогда объединение звездочек получается из первой звездочки добавлением к ней четырехугольников $B_iE_iC_iF_i$. Нам осталось объяснить, почему ориентированные углы $\angle(OA_i, OE_i)$ и $\angle(OE_i, OC_i)$ имеют одинаковый знак. Это очевидно из рассмотрения четырехугольника $A_iC_iA_{i+3}C_{i+4}$, в котором E_i является точкой пересечения диагоналей, центр окружности O лежит внутри угла $\angle A_{i+3}E_iC_{i+4}$, откуда следует требуемое.

♦ Не доказано, что площади треугольников складываются, а не вычитаются: дыра в 6 баллов, задача решена.

2. Пусть AD — высота остроугольного треугольника ABC . Точки B', C' выбраны на сторонах AB и AC соответственно так, что $BD = B'D$ и $CD = C'D$. Окружность Ω_b касается прямой BD в точке B и проходит через точку B' . Окружность Ω_c касается прямой CD в точке C и проходит через точку C' . Точки $X \in \Omega_b$ и $Y \in \Omega_c$ выбраны так, что $\angle BXD = \angle CYD = 180^\circ - \angle BAC$. Докажите, что B, C, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Пусть P и Q — точки пересечения DX и DY с Ω_b и Ω_c соответственно. Тогда $ABC \sim B'PB \sim C'CQ$ (проверяется простым счетом углов). Пусть S и T — точки пересечения касательных к описанной окружности ABC в точках A и B и A и C соответственно. Тогда $\angle BPD = \angle CBT$ как соответствующие элементы в подобных треугольниках $B'PB$ и ABC , а значит $\angle CBX = \angle XBD = \angle BPX = \angle BPD = \angle CBT$, откуда точки B, X, T лежат на одной прямой. Аналогично точки C, Y, S лежат на одной прямой.

Заметим также, что $TCDX$ вписанный, поскольку $\angle TXD = 180^\circ - \angle BXD = \angle BAC = 180^\circ - \angle BCT = 180^\circ - \angle DCT$. Аналогично вписан и $SBDY$.

Докажем теперь, что $TCD \sim SBD$. Подобие следует из равенства углов $\angle ABD = \angle TCD$ и отношений отрезков $SB/DB = TC/DC$, которое проверяется так: $SB/DB = (SB/AB) \cdot (AB/DB) = 1/(2 \cos(B) \cos(C)) = (TC/AC) \cdot (AC/BC) = TC/DC$.

Значит $\angle CXD = \angle CTD = \angle BSD = \angle BYD$, из чего искомая вписанность сразу следует.

♦ Доказано, что тройки точек C, Y, S и B, X, T лежат на одной прямой: 2 балла.

♦ Доказано, что $TCDX$ и $SBDY$ вписанные: 2 балла.

3. Назовём разбиение доски 49×49 на фигурки 1×2 и 1×3 странным, если фигурки нельзя пронумеровать числами от 1 до m (m — это число фигурок в конкретном разбиении) так, что любая фигурка, кроме первой в этой нумерации, хотя бы одной своей короткой стороной прилегает к фигурке с меньшим номером. Докажите, что число странных разбиений делится на 49.

Решение. Докажем, что в любом плохом разбиении найдутся 2 строки или 2 столбца (2 линии), замощённые фигурками полностью. Из этого будет следовать, что количество плохих разбиений делится на 49,

так как число способов замостить одну линию делится на 7 (можно заметить, что оно делится на 49, и доказывать существование одной замощённой линии вместо двух). Чтобы понять, что число способов замостить линию делится на 7, можно посчитать это количество по модулю 7 по рекуррентной формуле: количество способов разбить столбец длины k равно сумме количеств способов разбить столбцы длин $k - 2$ и $k - 3$.

Теперь докажем существование двух замощённых линий в любом плохом разбиении. Пусть разбиение A плохое. Заметим, что если поставить на произвольную фигурку номер 1 и начать в произвольном порядке нумеровать фигурки так, чтобы каждый раз фигурка прилегала меньшей стороной к фигурке с меньшим номером, то набор пронумерованных фигурок в конце процесса не будет зависеть от порядка нумерации. Действительно, это просто те фигурки, от которых можно дойти до первой, переходя каждый раз в фигурку, прилежащую к короткой стороне предыдущей. Назовём этот набор фигурок *замыканием* фигурки, которую мы обозначаем первой. Утверждение: замыкание любой фигурки покрывает клетки какого-то клетчатого прямоугольника и только их. Действительно, замыкание любой фигурки — это связная область доски по построению. При этом нигде на доске нет уголков из трёх клеток, в которых две боковые клетки лежат в замыкании, а центральная не лежит (так как иначе фигурка, содержащая эту центральную клетку, лежала бы в замыкании). Давайте рассмотрим самый левый столбец, пересекающий замыкание какой-то фигурки. В этом столбце посмотрим на какой-нибудь блок из подряд идущих клеток замыкания. Тогда, если итеративно переходить от текущего столбца к соседнему справа, то каждый раз клетки, соседние с клетками блока, либо все будут в замыкании (а соседние с клетками над блоком и под блоком в замыкании не будут), либо все в нём не будут. Таким образом, блок будет каждый раз переноситься на столбец вправо, пока не образуется область замыкания в форме прямоугольника, не связанная ни с какими другими областями. Значит других областей просто не было, и замыкание замощает этот прямоугольник.

Среди всех прямоугольников, являющихся замыканиями какой-то фигурки, выберем наибольший по площади, — прямоугольник X . Тогда утверждается, что X прилегает к какой-то паре противоположных сторон доски. Пусть это не так, тогда рядом с двумя соседними сторонами X нет границы доски (например рядом с верхней и рядом с левой). Заметим, что замыкание фигурки, содержащей клеточку слева сверху от X , — клеточку a , содержит все клетки над верхней стороной X и слева от левой стороны X , так как все фигурки, покрывающие эти два набора клеток, не могут прилегать к X короткой стороной, а значит расположены вдоль стороны X . Раз замыкание a — прямоугольник, то этот прямоугольник содержит X (ведь содержит все клетки над X и все клетки слева от X), а значит он больше, чем X , по площади.

Значит X прилегает к двум противоположным сторонам доски (например к верхней и нижней). Рассмотрим столбец, прилегающий к X . Он есть, ведь если X — вся доска, то изначальное разбиение на фигурки не было плохим. Тогда этот столбец (обозначим его за h) должен быть разбит на фигурки, — мы нашли первую из двух линий. Теперь рассмотрим замыкание любой фигурки из этой линии. Это прямоугольник, содержащий целиком h , но не являющийся всей доской. Тогда рядом с ним найдётся столбец, отличный от h , — нашли второй столбец.

♦ Задача сведена к поиску двух линий: 2 балла.

4. Каждому из членов жюри нравится какой-то набор задач позапрошлого Кубка. Для любой задачи A верно, что каждый может выбрать отличную от A задачу, которая ему нравится, так, что все выбранные задачи будут различны. Докажите, что все задачи можно распределить по двум турам так, чтобы каждому в жюри нравилась хотя бы одна задача из каждого тура.

Решение. Построим двудольный граф на членах жюри и задачах. Члены жюри будут соответствовать вершинам первой доли, а задачи — вершинам второй. Тогда для любой вершины A из второй доли найдётся паросочетание, покрывающее все вершины первой доли и не покрывающее A .

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по количеству вершин. База: одна вершина, очевидно.

Переход: выберем задачу X , которая соединена хотя бы с одним членом жюри Y . Построим паросочетание u , не покрывающее X . В этом паросочетании Y соединён с задачей $Z \neq X$. Отнесём задачу Z в первый тур, а задачу X — во второй. Тогда для члена жюри Y условие уже выполняется, — он соединён с задачей из первого тура и с задачей из второго. Назовём Y *удовлетворённым*. Пока среди членов жюри есть неудовлетворённый, будем делать следующее: если какой-то из неудовлетворённых членов жюри L соединён хотя бы с одной из задач, которые мы уже отнесли к какому-то туру, мы будем относить задачу, соответствующую L в паросочетании u , к противоположному туру. При этом человек L будет становиться удовлетворённым. Когда мы не можем так сделать, все оставшиеся неудовлетворённые члены жюри не соединены ни с одной из задач, уже распределённых по турам. В этом случае применим предположение индукции к графу, получающемуся из исходного удалением всех удовлетворённых членов жюри.

5. Докажите, что вещественные числа p , q и r удовлетворяют условию

$$p^4(q - r)^2 + 2p^2(q + r) + 1 = p^4$$

тогда и только тогда, когда квадратные трёхчлены $x^2 + px + q$ и $y^2 - py + r$ имеют корни x_1, x_2 и y_1, y_2 соответственно, для которых $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 1$.

Решение. Пусть $x_1 > x_2$ – корни первого трёхчлена, $y_1 > y_2$ – корни второго. Как известно, $x_1 + x_2 = -p$, $(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q$, $y_1 + y_2 = p$, $(y_1 - y_2)^2 = p^2 - 4r$. По условию

$$2 = 2(x_1 y_1 - x_2 y_2) = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)(x_1 + x_2) = p(x_1 - x_2 - y_1 + y_2),$$

откуда следует, что $p \neq 0$ и

$$x_1 - x_2 - y_1 + y_2 = \frac{2}{p}. \quad (1)$$

Поскольку

$$(x_1 - x_2 - y_1 + y_2)(x_1 - x_2 + y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = p^2 - 4q - (p^2 - 4r) = 4(r - q),$$

имеем

$$x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = 2p(r - q). \quad (2)$$

Полусумма (1) и (2) даёт $x_1 - x_2 = \frac{1}{p} - p(q - r)$, то есть

$$\left(\frac{1}{p} - p(q - r)\right)^2 = p^2 - 4q,$$

откуда умножением на p^2 получается требуемое равенство.

Обратно, пусть $p^4(q - r)^2 + 2p^2(q + r) + 1 = p^4$. Вычитая $4p^2q$ и $4p^2r$, получаем

$$p^2 - 4q = \left(\frac{p^2(r - q) + 1}{p}\right)^2, \quad p^2 - 4r = \left(\frac{p^2(q - r) + 1}{p}\right)^2$$

соответственно. Отсюда следует, что квадратные уравнения из условия имеют корни, которые можно обозначить x_1, x_2, y_1, y_2 так, чтобы было $x_1 - x_2 = \frac{p^2(r - q) + 1}{p}$, $y_1 - y_2 = -\frac{p^2(q - r) + 1}{p}$. Тогда $x_1 - x_2 - y_1 + y_2 = \frac{2}{p}$ и $x_1 y_1 - x_2 y_2 = ((x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)(x_1 + x_2))/2 = p(x_1 - x_2 - y_1 + y_2)/2 = 1$.

6. Натуральное число n назовем интересным, если оно равно сотой степени количества своих натуральных делителей. Существуют ли два различных интересных числа a и b , такие, что a^2 делится на b и b^2 делится на a ?

Ответ: Да. **Решение.** Например, $a = 101^{200} 3^{100} 67^{100}$ и $b = 101^{100} 3^{200} 67^{200}$. Тот факт, что a^2 делится на b и b^2 делится на a , виден невооруженным глазом. По формуле для количества делителей вычислим $d(a) = 201 \cdot 101 \cdot 101 = 101^2 \cdot 3 \cdot 67$, откуда как и требовалось, $a = d(a)^{100}$. Также $d(b) = 101 \cdot 201 \cdot 201 = 101 \cdot 3^2 \cdot 67^2$, откуда $b = d(b)^{100}$.

7. Дан выпуклый $2n$ -угольник. Для каждой упорядоченной пары различных его вершин (A, B) точка, симметричная A относительно B , отмечена красным цветом. Докажите, что различных красных точек не менее $2n^2$.

Решение. Всего упорядоченных пар различных вершин $2n(2n - 1)$. Среди красных точек каждая получалась не более чем двумя способами. Действительно, посмотрим на красную точку A . Хотим понять, что среди вершин многоугольника не более двух, при симметрии относительно которых A переходит в другую вершину многоугольника. Пусть таких вершин 3, — X, Y и Z , а симметричные A относительно них — X', Y' и Z' . При этом пусть луч AY лежит в угле, образованном лучами AX и AZ . Очевидно, Y должна лежать на луче AY между A и пересечением луча AY с отрезком XZ . Тогда Y' либо тоже лежит на этом отрезке, либо лежит внутри четырёхугольника $XX'Y'Y$, то есть не может являться вершиной.

Найдём $2n$ красных точек, получающихся ровно одним способом. Для этого для каждой вершины V многоугольника проведём через неё опорную прямую, не параллельную никакой из сторон многоугольника. Проведём вторую опорную прямую этого направления. Она будет проходить через вершину $W \neq V$. Тогда точка, симметричная V относительно W может получиться только при этой симметрии.

Таким образом получается хотя бы $\frac{2n(2n-1)-2n}{2} + 2n = 2n^2$ точек.

8. Положительные числа a_1, a_2, \dots, a_6 удовлетворяют условию

$$1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < 4\sqrt[4]{4a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{2a_1+1} + \frac{1}{2a_2+1} + \dots + \frac{1}{2a_6+1} < 2.$$

Решение. Докажем, что сумма любых трех слагаемых в левой части меньше 1, например первых трех — из этого задача очевидно следует. Вычтем из 1 сумму этих трех слагаемых, домножим на знаменатели и раскроем скобки. Переобозначим для краткости $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d, a_5 = e, a_6 = f$. Теперь нужно доказать, что

$$8abc + 4(ab + bc + ac) + 2(a + b + c) + 1 - 4(ab + bc + ac) - 4(a + b + c) - 3 > 0 \iff$$

$$\iff 4abc \geq 1 + a + b + c = 4\sqrt[4]{abcdef} - d - e - f \iff 4abc + d + e + f \geq 4\sqrt[4]{abcdef}.$$

Последнее неравенство это просто неравенство о средних для набора $4abc, d, e, f$.

9. Для натуральных чисел $a > b > 1$ можно по крайней мере двумя разными способами подобрать натуральные числа x и y , большие 1, так, что

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} = \frac{b^y - 1}{b - 1}.$$

Докажите, что a и b взаимно просты.

Решение. Предположим противное: у a и b есть общий простой делитель p , и рассмотрим пару (x, y) , удовлетворяющую уравнению из условия. Поскольку $a > b$, имеем $x < y$. Перепишем уравнение в виде

$$a^{x-1} + a^{x-2} + \dots + a + 1 = b^{y-1} + b^{y-2} + \dots + b + 1,$$

или

$$(a^{x-1} - b^{x-1}) + (a^{x-2} - b^{x-2}) + \dots + (a - b) = b^x + b^{x+1} + \dots + b^{y-1}.$$

Левая часть имеет вид $(a - b)(pk + 1)$ с некоторым натуральным k , поэтому содержит p в такой же степени, как $a - b$. С другой стороны, в правой части есть единственное слагаемое b^x , содержащее p в наименьшей степени, поэтому правая часть содержит p в степени ровно в x раз большей, чем b . Отсюда x определяется однозначно, а за ним и y — противоречие.

10. Дано простое число $p > 2$. Докажите, что для всех достаточно больших натуральных x хотя бы одно из чисел $x + 1, x + 2, \dots, x + \frac{p+3}{2}$ имеет простой делитель, больший p .

Решение. Поскольку все простые числа, кроме 2, нечётны, количество простых чисел, не превосходящих p , не больше $\frac{p+1}{2}$; пусть это числа p_1, \dots, p_k .

Положим $M = p^{\frac{p+1}{2}}$ и будем рассматривать только x , большие M . Предположим, что все числа $x + 1, x + 2, \dots, x + \frac{p+3}{2}$ имеют в разложении на простые множители только простые числа p_1, \dots, p_k . Каждое такое разложение запишем в виде $x + i = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ и сопоставим числу x_i наибольший из множителей $p_j^{r_j}$. Очевидно, этот сомножитель больше p . Поскольку разных простых в разложениях меньше, чем чисел в ряду, каким-то двум числам из ряда будут сопоставлены степени одного и того же простого; даже меньшая из этих степеней больше p , и на неё делятся оба числа. Получается, что два числа с разностью меньше p кратны одному и тому же числу, большему p — противоречие, из которого и следует утверждение задачи.

ЮНИОРЫ, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТА лига, 4 тур
РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ДЛЯ ЖЮРИ.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. Две правильные семиугольные звезды вписаны в фиксированную окружность. Докажите, что отношение площади к периметру их объединения не зависит от расположения звезд.

Решение. Пусть объединение это многоугольник $A = X_1X_2 \dots X_k$. Докажем, что $S(A)/P(A) = 2r$, где r — расстояние от центра окружности O до каждого из лучей звезд. Для этого проведем все отрезки вида OX_i и разобьем тем самым многоугольник в объединение треугольников OX_iX_{i+1} . Площадь такого треугольника равна $r \cdot X_iX_{i+1}/2$, откуда следует требуемое.

В этом решении есть недочет: нужно еще доказать, почему площади треугольников именно складываются, а не вычитаются. Есть много способов это доказать, приведем следующий. Изучим более внимательно, как устроены треугольники. Пусть одна звездочка это $A_1B_1A_2B_2 \dots A_7B_7$, где A_i — точки на окружности, а другая это $C_1D_1 \dots C_7D_7$, где C_i — на дугах A_iA_{i+1} . Представим вторую звездочку в виде объединения четырехугольников $OD_{i-1}C_iD_i$. Пусть $D_{i-1}C_i$ пересекает A_iB_i в точке E_i , а B_iA_{i+1} пересекает C_iD_i в точке F_i . Тогда объединение звездочек получается из первой звездочки добавлением к ней четырехугольников $B_iE_iC_iF_i$. Нам осталось объяснить, почему ориентированные углы $\angle(OA_i, OE_i)$ и $\angle(OE_i, OC_i)$ имеют одинаковый знак. Это очевидно из рассмотрения четырехугольника $A_iC_iA_{i+3}C_{i+4}$, в котором E_i является точкой пересечения диагоналей, центр окружности O лежит внутри угла $\angle A_{i+3}E_iC_{i+4}$, откуда следует требуемое.

♦ Не доказано, что площади треугольников складываются, а не вычитаются: дыра в 6 баллов, задача решена.

2. Пусть AD — высота остроугольного треугольника ABC . Точки B', C' выбраны на сторонах AB и AC соответственно так, что $BD = B'D$ и $CD = C'D$. Окружность Ω_b касается прямой BD в точке B и проходит через точку B' . Окружность Ω_c касается прямой CD в точке C и проходит через точку C' . Точки $X \in \Omega_b$ и $Y \in \Omega_c$ выбраны так, что $\angle BXD = \angle CYD = 180^\circ - \angle BAC$. Докажите, что B, C, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Пусть P и Q — точки пересечения DX и DY с Ω_b и Ω_c соответственно. Тогда $ABC \sim B'PB \sim C'QC$ (проверяется простым счетом углов). Пусть S и T — точки пересечения касательных к описанной окружности ABC в точках A и B и A и C соответственно. Тогда $\angle BPD = \angle CBT$ как соответствующие элементы в подобных треугольниках $B'PB$ и ABC , а значит $\angle CBX = \angle XBD = \angle BPX = \angle BPD = \angle CBT$, откуда точки B, X, T лежат на одной прямой. Аналогично точки C, Y, S лежат на одной прямой.

Заметим также, что $TCDX$ вписанный, поскольку $\angle TXD = 180^\circ - \angle BXD = \angle BAC = 180^\circ - \angle BCT = 180^\circ - \angle DCT$. Аналогично вписан и $SBDY$.

Докажем теперь, что $TCD \sim SBD$. Подобие следует из равенства углов $\angle ABD = \angle TCD$ и отношений отрезков $SB/DB = TC/DC$, которое проверяется так: $SB/DB = (SB/AB) \cdot (AB/DB) = 1/(2 \cos(B) \cos(C)) = (TC/AC) \cdot (AC/BC) = TC/DC$.

Значит $\angle CXD = \angle CTD = \angle BSD = \angle BYD$, из чего искомая вписанность сразу следует.

♦ Доказано, что тройки точек C, Y, S и B, X, T лежат на одной прямой: 2 балла.

♦ Доказано, что $TCDX$ и $SBDY$ вписанные: 2 балла.

3. Назовём разбиение квадратной клетчатой доски на фигурки 1×2 и 1×3 странным, если фигурки нельзя пронумеровать числами от 1 до m (m — это число фигурок в конкретном разбиении) так, что любая фигурка, кроме первой в этой нумерации, хотя бы одной своей короткой стороной прилегает к фигурке с меньшим номером. Докажите, что в любом странном разбиении найдется такая линия (строка или столбец), что любая фигурка разбиения либо содержится в этой линии, либо не имеет с ней общих клеток.

Решение. Пусть разбиение A плохое. Заметим, что если поставить на произвольную фигурку номер 1 и начать в произвольном порядке нумеровать фигурки так, чтобы каждый раз фигурка прилегала меньшей стороной к фигурке с меньшим номером, то набор пронумерованных фигурок в конце процесса не будет зависеть от порядка нумерации. Действительно, это просто те фигурки, от которых можно прийти до первой, переходя каждый раз в фигурку, прилегающую к короткой стороне предыдущей. Назовём этот набор

фигурок замыканием фигурки, которую мы обозначаем первой. Утверждение: замыкание любой фигурки покрывает клетки какого-то клетчатого прямоугольника и только их. Действительно, замыкание любой фигурки — это связная область доски по построению. При этом нигде на доске нет уголков из трёх клеток, в которых две боковые клетки лежат в замыкании, а центральная не лежит (так как иначе фигурка, содержащая эту центральную клетку, лежала бы в замыкании). Давайте рассмотрим самый левый столбец, пересекающий замыкание какой-то фигурки. В этом столбце посмотрим на какой-нибудь блок из подряд идущих клеток замыкания. Тогда, если итеративно переходить от текущего столбца к соседнему справа, то каждый раз клетки, соседние с клетками блока, либо все будут в замыкании (а соседние с клетками над блоком и под блоком в замыкании не будут), либо все в нём не будут. Таким образом, блок будет каждый раз переноситься на столбец вправо, пока не образуется область замыкания в форме прямоугольника, не связанная ни с какими другими областями. Значит других областей просто не было, и замыкание замощает этот прямоугольник.

Среди всех прямоугольников, являющихся замыканиями какой-то фигурки, выберем наибольший по площади, — прямоугольник X . Тогда утверждается, что X прилегает к какой-то паре противоположных сторон доски. Пусть это не так, тогда рядом с двумя соседними сторонами X нет границы доски (например рядом с верхней и рядом с левой). Заметим, что замыкание фигурки, содержащей клеточку слева сверху от X , — клеточку a , содержит все клетки над верхней стороной X и слева от левой стороны X , так как все фигурки, покрывающие эти два набора клеток, не могут прилегать к X короткой стороной, а значит расположены вдоль стороны X . Раз замыкание a — прямоугольник, то этот прямоугольник содержит X (ведь содержит все клетки над X и все клетки слева от X), а значит он больше, чем X , по площади.

Значит X прилегает к двум противоположным сторонам доски (например к верхней и нижней). Рассмотрим столбец, прилегающий к X . Он есть, ведь если X — вся доска, то изначальное разбиение на фигурки не было плохим. Тогда этот столбец (обозначим его за h) должен быть разбит на фигурки, — мы нашли замощённую линию.

4. Каждому из членов жюри нравится какой-то набор задач позапрошлого Кубка. Для любой задачи A верно, что каждый может выбрать отличную от A задачу, которая ему нравится, так, что все выбранные задачи будут различны. Докажите, что все задачи можно распределить по двум турам так, чтобы каждому в жюри нравилась хотя бы одна задача из каждого тура.

Решение. Построим двудольный граф на членах жюри и задачах. Члены жюри будут соответствовать вершинам первой доли, а задачи — вершинам второй. Тогда для любой вершины A из второй доли найдётся паросочетание, покрывающее все вершины первой доли и не покрывающее A .

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по количеству вершин. База: одна вершина, очевидно.

Переход: выберем задачу X , которая соединена хотя бы с одним членом жюри Y . Построим паросочетание u , не покрывающее X . В этом паросочетании Y соединён с задачей $Z \neq X$. Отнесём задачу Z в первый тур, а задачу X — во второй. Тогда для члена жюри Y условие уже выполняется, — он соединён с задачей из первого тура и с задачей из второго. Назовём Y *удовлетворённым*. Пока среди членов жюри есть неудовлетворённый, будем делать следующее: если какой-то из неудовлетворённых членов жюри L соединён хотя бы с одной из задач, которые мы уже отнесли к какому-то туру, мы будем относить задачу, соответствующую L в паросочетании u , к противоположному туру. При этом человек L будет становиться удовлетворённым. Когда мы не можем так сделать, все оставшиеся неудовлетворённые члены жюри не соединены ни с одной из задач, уже распределённых по турам. В этом случае применим предположение индукции к графу, получающемуся из исходного удалением всех удовлетворённых членов жюри.

5. Докажите, что вещественные числа p , q и r удовлетворяют условию

$$p^4(q-r)^2 + 2p^2(q+r) + 1 = p^4$$

тогда и только тогда, когда квадратные трёхчлены $x^2 + px + q$ и $y^2 - py + r$ имеют корни x_1 , x_2 и y_1 , y_2 соответственно, для которых $x_1y_1 - x_2y_2 = 1$.

Решение. Пусть $x_1 > x_2$ — корни первого трёхчлена, $y_1 > y_2$ — корни второго. Как известно, $x_1 + x_2 = -p$, $(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q$, $y_1 + y_2 = p$, $(y_1 - y_2)^2 = p^2 - 4r$. По условию

$$2 = 2(x_1y_1 - x_2y_2) = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)(x_1 + x_2) = p(x_1 - x_2 - y_1 + y_2),$$

откуда следует, что $p \neq 0$ и

$$x_1 - x_2 - y_1 + y_2 = \frac{2}{p}. \quad (1)$$

Поскольку

$$(x_1 - x_2 - y_1 + y_2)(x_1 - x_2 + y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = p^2 - 4q - (p^2 - 4r) = 4(r - q),$$

имеем

$$x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = 2p(r - q). \quad (2)$$

Полусумма (1) и (2) даёт $x_1 - x_2 = \frac{1}{p} - p(q - r)$, то есть

$$\left(\frac{1}{p} - p(q - r)\right)^2 = p^2 - 4q,$$

откуда умножением на p^2 получается требуемое равенство.

Обратно, пусть $p^4(q - r)^2 + 2p^2(q + r) + 1 = p^4$. Вычитая $4p^2q$ и $4p^2r$, получаем

$$p^2 - 4q = \left(\frac{p^2(r - q) + 1}{p}\right)^2, \quad p^2 - 4r = \left(\frac{p^2(q - r) + 1}{p}\right)^2$$

соответственно. Отсюда следует, что квадратные уравнения из условия имеют корни, которые можно обозначить x_1, x_2, y_1, y_2 так, чтобы было $x_1 - x_2 = \frac{p^2(r - q) + 1}{p}$, $y_1 - y_2 = -\frac{p^2(q - r) + 1}{p}$. Тогда $x_1 - x_2 - y_1 + y_2 = \frac{2}{p}$ и $x_1y_1 - x_2y_2 = ((x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)(x_1 + x_2))/2 = p(x_1 - x_2 - y_1 + y_2)/2 = 1$.

6. *Натуральное число n назовем интересным, если оно равно сотой степени количества своих натуральных делителей. Существуют ли два различных интересных числа a и b , такие, что a^2 делится на b и b^2 делится на a ?*

Ответ: Да. **Решение.** Например, $a = 101^{200}3^{100}67^{100}$ и $b = 101^{100}3^{200}67^{200}$. Тот факт, что a^2 делится на b и b^2 делится на a , виден невооруженным глазом. По формуле для количества делителей вычислим $d(a) = 201 \cdot 101 \cdot 101 = 101^2 \cdot 3 \cdot 67$, откуда как и требовалось, $a = d(a)^{100}$. Также $d(b) = 101 \cdot 201 \cdot 201 = 101 \cdot 3^2 \cdot 67^2$, откуда $b = d(b)^{100}$.

7. *Дан выпуклый $2n$ -угольник. Для каждой упорядоченной пары различных его вершин (A, B) точка, симметричная A относительно B , отмечена красным цветом. Докажите, что различных красных точек не менее $2n^2$.*

Решение. Всего упорядоченных пар различных вершин $2n(2n - 1)$. Среди красных точек каждая получалась не более чем двумя способами. Действительно, посмотрим на красную точку A . Хотим понять, что среди вершин многоугольника не более двух, при симметрии относительно которых A переходит в другую вершину многоугольника. Пусть таких вершин 3, — X, Y и Z , а симметричные A относительно них — X', Y' и Z' . При этом пусть луч AY лежит в угле, образованном лучами AX и AZ . Очевидно, Y должна лежать на луче AY между A и пересечением луча AY с отрезком XZ . Тогда Y' либо тоже лежит на этом отрезке, либо лежит внутри четырёхугольника $XX'Y'Y$, то есть не может являться вершиной.

Найдём $2n$ красных точек, получающихся ровно одним способом. Для этого для каждой вершины V многоугольника проведём через неё опорную прямую, не параллельную никакой из сторон многоугольника. Проведём вторую опорную прямую этого направления. Она будет проходить через вершину $W \neq V$. Тогда точка, симметричная V относительно W может получиться только при этой симметрии.

Таким образом получается хотя бы $\frac{2n(2n-1)-2n}{2} + 2n = 2n^2$ точек.

8. *Существует ли непостоянная функция $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(x) + f(y) + f(z) = 1$ для любых положительных x, y, z , удовлетворяющих условию $x + y + z + 1 = 4xyz$?*

Ответ: Существует. **Решение.** Подойдет $f(x) = 1/(2x + 1)$. Условие легко проверить:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} &= 1 \iff \\ \iff (2x+1)(2y+1) + (2y+1)(2z+1) + (2x+1)(2z+1) &= (2x+1)(2y+1)(2z+1) \iff \\ \iff 4(xy + yz + xz) + 4(x + y + z) + 3 &= 8xyz + 4(xy + yz + xz) + 2(x + y + z) + 1 \iff \\ \iff 8xyz - 2(x + y + z) - 2 &= 0 \iff x + y + z + 1 = 4xyz. \end{aligned}$$

9. *Для натуральных чисел $a > b > 1$ можно по крайней мере двумя разными способами подобрать натуральные числа x и y , большие 1, так, что*

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} = \frac{b^y - 1}{b - 1}.$$

Докажите, что a и b взаимно просты.

Решение. Предположим противное: у a и b есть общий простой делитель p , и рассмотрим пару (x, y) , удовлетворяющую уравнению из условия. Поскольку $a > b$, имеем $x < y$. Перепишем уравнение в виде

$$a^{x-1} + a^{x-2} + \dots + a + 1 = b^{y-1} + b^{y-2} + \dots + b + 1,$$

или

$$(a^{x-1} - b^{x-1}) + (a^{x-2} - b^{x-2}) + \dots + (a - b) = b^x + b^{x+1} + \dots + b^{y-1}.$$

Левая часть имеет вид $(a - b)(pk + 1)$ с некоторым натуральным k , поэтому содержит p в такой же степени, как $a - b$. С другой стороны, в правой части есть единственное слагаемое b^x , содержащее p в наименьшей степени, поэтому правая часть содержит p в степени ровно в x раз большей, чем b . Отсюда x определяется однозначно, а за ним и y – противоречие.

10. Дано простое число $p > 2$. Докажите, что для всех достаточно больших натуральных x хотя бы одно из чисел $x + 1, x + 2, \dots, x + \frac{p+3}{2}$ имеет простой делитель, больший p .

Решение. Поскольку все простые числа, кроме 2, нечётны, количество простых чисел, не превосходящих p , не больше $\frac{p+1}{2}$; пусть это числа p_1, \dots, p_k .

Положим $M = p^{\frac{p+1}{2}}$ и будем рассматривать только x , большие M . Предположим, что все числа $x + 1, x + 2, \dots, x + \frac{p+3}{2}$ имеют в разложении на простые множители только простые числа p_1, \dots, p_k . Каждое такое разложение запишем в виде $x + i = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ и сопоставим числу x_i наибольший из множителей $p_j^{r_j}$. Очевидно, этот сомножитель больше p . Поскольку разных простых в разложениях меньше, чем чисел в ряду, каким-то двум числам из ряда будут сопоставлены степени одного и того же простого; даже меньшая из этих степеней больше p , и на неё делятся оба числа. Получается, что два числа с разностью меньше p кратны одному и тому же числу, большему p – противоречие, из которого и следует утверждение задачи.

ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ лига, 4 тур
РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ДЛЯ ЖЮРИ.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. Две правильные семиугольные звезды вписаны в фиксированную окружность. Докажите, что отношение площади к периметру их объединения не зависит от расположения звезд.

Решение. Пусть объединение это многоугольник $A = X_1X_2 \dots X_k$. Докажем, что $S(A)/P(A) = 2r$, где r — расстояние от центра окружности O до каждого из лучей звезд. Для этого проведем все отрезки вида OX_i и разобьем тем самым многоугольник в объединение треугольников OX_iX_{i+1} . Площадь такого треугольника равна $r \cdot X_iX_{i+1}/2$, откуда следует требуемое.

В этом решении есть недочет: нужно еще доказать, почему площади треугольников именно складываются, а не вычитаются. Есть много способов это доказать, приведем следующий. Изучим более внимательно, как устроены треугольники. Пусть одна звездочка это $A_1B_1A_2B_2 \dots A_7B_7$, где A_i — точки на окружности, а другая это $C_1D_1 \dots C_7D_7$, где C_i — на дугах A_iA_{i+1} . Представим вторую звездочку в виде объединения четырехугольников $OD_{i-1}C_iD_i$. Пусть $D_{i-1}C_i$ пересекает A_iB_i в точке E_i , а B_iA_{i+1} пересекает C_iD_i в точке F_i . Тогда объединение звездочек получается из первой звездочки добавлением к ней четырехугольников $B_iE_iC_iF_i$. Нам осталось объяснить, почему ориентированные углы $\angle(OA_i, OE_i)$ и $\angle(OE_i, OC_i)$ имеют одинаковый знак. Это очевидно из рассмотрения четырехугольника $A_iC_iA_{i+3}C_{i+4}$, в котором E_i является точкой пересечения диагоналей, центр окружности O лежит внутри угла $\angle A_{i+3}E_iC_{i+4}$, откуда следует требуемое.

♦ Не доказано, что площади треугольников складываются, а не вычитаются: дыра в 6 баллов, задача решена.

2. Пусть AD — высота остроугольного треугольника ABC . Точки B', C' выбраны на сторонах AB и AC соответственно так, что $BD = B'D$ и $CD = C'D$. Окружность Ω_b касается прямой BD в точке B и проходит через точку B' . Окружность Ω_c касается прямой CD в точке C и проходит через точку C' . Точки $X \in \Omega_b$ и $Y \in \Omega_c$ выбраны так, что $\angle BXD = \angle CYD = 180^\circ - \angle BAC$. Докажите, что B, C, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Пусть P и Q — точки пересечения DX и DY с Ω_b и Ω_c соответственно. Тогда $ABC \sim B'PB \sim C'QC$ (проверяется простым счетом углов). Пусть S и T — точки пересечения касательных к описанной окружности ABC в точках A и B и A и C соответственно. Тогда $\angle BPD = \angle CBT$ как соответствующие элементы в подобных треугольниках $B'PB$ и ABC , а значит $\angle CBX = \angle XBD = \angle BPX = \angle BPD = \angle CBT$, откуда точки B, X, T лежат на одной прямой. Аналогично точки C, Y, S лежат на одной прямой.

Заметим также, что $TCDX$ вписанный, поскольку $\angle TXD = 180^\circ - \angle BXD = \angle BAC = 180^\circ - \angle BCT = 180^\circ - \angle DCT$. Аналогично вписан и $SBDY$.

Докажем теперь, что $TCD \sim SBD$. Подобие следует из равенства углов $\angle ABD = \angle TCD$ и отношений отрезков $SB/DB = TC/DC$, которое проверяется так: $SB/DB = (SB/AB) \cdot (AB/DB) = 1/(2 \cos(B) \cos(C)) = (TC/AC) \cdot (AC/BC) = TC/DC$.

Значит $\angle CXD = \angle CTD = \angle BSD = \angle BYD$, из чего искомая вписанность сразу следует.

♦ Доказано, что тройки точек C, Y, S и B, X, T лежат на одной прямой: 2 балла.

♦ Доказано, что $TCDX$ и $SBDY$ вписанные: 2 балла.

3. Назовём разбиение квадратной клетчатой доски на фигурки 1×2 и 1×3 странным, если фигурки нельзя пронумеровать числами от 1 до m (m — это число фигурок в конкретном разбиении) так, что любая фигурка, кроме первой в этой нумерации, хотя бы одной своей короткой стороной прилегает к фигурке с меньшим номером. Докажите, что в любом странном разбиении найдется такая линия (строка или столбец), что любая фигурка разбиения либо содержится в этой линии, либо не имеет с ней общих клеток.

Решение. Пусть разбиение A плохое. Заметим, что если поставить на произвольную фигурку номер 1 и начать в произвольном порядке нумеровать фигурки так, чтобы каждый раз фигурка прилегала меньшей стороной к фигурке с меньшим номером, то набор пронумерованных фигурок в конце процесса не будет зависеть от порядка нумерации. Действительно, это просто те фигурки, от которых можно дойти до первой, переходя каждый раз в фигурку, прилегающую к короткой стороне предыдущей. Назовём этот набор

фигурок замыканием фигурки, которую мы обозначаем первой. Утверждение: замыкание любой фигурки покрывает клетки какого-то клетчатого прямоугольника и только их. Действительно, замыкание любой фигурки — это связная область доски по построению. При этом нигде на доске нет уголков из трёх клеток, в которых две боковые клетки лежат в замыкании, а центральная не лежит (так как иначе фигурка, содержащая эту центральную клетку, лежала бы в замыкании). Давайте рассмотрим самый левый столбец, пересекающий замыкание какой-то фигурки. В этом столбце посмотрим на какой-нибудь блок из подряд идущих клеток замыкания. Тогда, если итеративно переходить от текущего столбца к соседнему справа, то каждый раз клетки, соседние с клетками блока, либо все будут в замыкании (а соседние с клетками над блоком и под блоком в замыкании не будут), либо все в нём не будут. Таким образом, блок будет каждый раз переноситься на столбец вправо, пока не образуется область замыкания в форме прямоугольника, не связанная ни с какими другими областями. Значит других областей просто не было, и замыкание замощает этот прямоугольник.

Среди всех прямоугольников, являющихся замыканиями какой-то фигурки, выберем наибольший по площади, — прямоугольник X . Тогда утверждается, что X прилегает к какой-то паре противоположных сторон доски. Пусть это не так, тогда рядом с двумя соседними сторонами X нет границы доски (например рядом с верхней и рядом с левой). Заметим, что замыкание фигурки, содержащей клеточку слева сверху от X , — клеточку a , содержит все клетки над верхней стороной X и слева от левой стороны X , так как все фигурки, покрывающие эти два набора клеток, не могут прилегать к X короткой стороной, а значит расположены вдоль стороны X . Раз замыкание a — прямоугольник, то этот прямоугольник содержит X (ведь содержит все клетки над X и все клетки слева от X), а значит он больше, чем X , по площади.

Значит X прилегает к двум противоположным сторонам доски (например к верхней и нижней). Рассмотрим столбец, прилегающий к X . Он есть, ведь если X — вся доска, то изначальное разбиение на фигурки не было плохим. Тогда этот столбец (обозначим его за h) должен быть разбит на фигурки, — мы нашли замощённую линию.

4. Каждому из членов жюри нравится какой-то набор задач позапрошлого Кубка. Для любой задачи A верно, что каждый может выбрать отличную от A задачу, которая ему нравится, так, что все выбранные задачи будут различны. Докажите, что все задачи можно распределить по двум турам так, чтобы каждому в жюри нравилась хотя бы одна задача из каждого тура.

Решение. Построим двудольный граф на членах жюри и задачах. Члены жюри будут соответствовать вершинам первой доли, а задачи — вершинам второй. Тогда для любой вершины A из второй доли найдётся паросочетание, покрывающее все вершины первой доли и не покрывающее A .

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по количеству вершин. База: одна вершина, очевидно.

Переход: выберем задачу X , которая соединена хотя бы с одним членом жюри Y . Построим паросочетание u , не покрывающее X . В этом паросочетании Y соединён с задачей $Z \neq X$. Отнесём задачу Z в первый тур, а задачу X — во второй. Тогда для члена жюри Y условие уже выполняется, — он соединён с задачей из первого тура и с задачей из второго. Назовём Y *удовлетворённым*. Пока среди членов жюри есть неудовлетворённый, будем делать следующее: если какой-то из неудовлетворённых членов жюри L соединён хотя бы с одной из задач, которые мы уже отнесли к какому-то туру, мы будем относить задачу, соответствующую L в паросочетании u , к противоположному туру. При этом человек L будет становиться удовлетворённым. Когда мы не можем так сделать, все оставшиеся неудовлетворённые члены жюри не соединены ни с одной из задач, уже распределённых по турам. В этом случае применим предположение индукции к графу, получающемуся из исходного удалением всех удовлетворённых членов жюри.

5. Докажите, что вещественные числа p , q и r удовлетворяют условию

$$p^4(q-r)^2 + 2p^2(q+r) + 1 = p^4$$

тогда и только тогда, когда квадратные трёхчлены $x^2 + px + q$ и $y^2 - py + r$ имеют корни x_1 , x_2 и y_1 , y_2 соответственно, для которых $x_1y_1 - x_2y_2 = 1$.

Решение. Пусть $x_1 > x_2$ — корни первого трёхчлена, $y_1 > y_2$ — корни второго. Как известно, $x_1 + x_2 = -p$, $(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q$, $y_1 + y_2 = p$, $(y_1 - y_2)^2 = p^2 - 4r$. По условию

$$2 = 2(x_1y_1 - x_2y_2) = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)(x_1 + x_2) = p(x_1 - x_2 - y_1 + y_2),$$

откуда следует, что $p \neq 0$ и

$$x_1 - x_2 - y_1 + y_2 = \frac{2}{p}. \quad (1)$$

Поскольку

$$(x_1 - x_2 - y_1 + y_2)(x_1 - x_2 + y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = p^2 - 4q - (p^2 - 4r) = 4(r - q),$$

имеем

$$x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = 2p(r - q). \quad (2)$$

Полусумма (1) и (2) даёт $x_1 - x_2 = \frac{1}{p} - p(q - r)$, то есть

$$\left(\frac{1}{p} - p(q - r)\right)^2 = p^2 - 4q,$$

откуда умножением на p^2 получается требуемое равенство.

Обратно, пусть $p^4(q - r)^2 + 2p^2(q + r) + 1 = p^4$. Вычитая $4p^2q$ и $4p^2r$, получаем

$$p^2 - 4q = \left(\frac{p^2(r - q) + 1}{p}\right)^2, \quad p^2 - 4r = \left(\frac{p^2(q - r) + 1}{p}\right)^2$$

соответственно. Отсюда следует, что квадратные уравнения из условия имеют корни, которые можно обозначить x_1, x_2, y_1, y_2 так, чтобы было $x_1 - x_2 = \frac{p^2(r - q) + 1}{p}$, $y_1 - y_2 = -\frac{p^2(q - r) + 1}{p}$. Тогда $x_1 - x_2 - y_1 + y_2 = \frac{2}{p}$ и $x_1y_1 - x_2y_2 = ((x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)(x_1 + x_2))/2 = p(x_1 - x_2 - y_1 + y_2)/2 = 1$.

6. *Натуральное число n назовем интересным, если оно равно сотой степени количества своих натуральных делителей. Существуют ли два различных интересных числа a и b , такие, что a^2 делится на b и b^2 делится на a ?*

Ответ: Да. **Решение.** Например, $a = 101^{200}3^{100}67^{100}$ и $b = 101^{100}3^{200}67^{200}$. Тот факт, что a^2 делится на b и b^2 делится на a , виден невооруженным глазом. По формуле для количества делителей вычислим $d(a) = 201 \cdot 101 \cdot 101 = 101^2 \cdot 3 \cdot 67$, откуда как и требовалось, $a = d(a)^{100}$. Также $d(b) = 101 \cdot 201 \cdot 201 = 101 \cdot 3^2 \cdot 67^2$, откуда $b = d(b)^{100}$.

7. *Дан выпуклый $2n$ -угольник. Для каждой упорядоченной пары различных его вершин (A, B) точка, симметричная A относительно B , отмечена красным цветом. Докажите, что различных красных точек не менее $2n^2$.*

Решение. Всего упорядоченных пар различных вершин $2n(2n - 1)$. Среди красных точек каждая получалась не более чем двумя способами. Действительно, посмотрим на красную точку A . Хотим понять, что среди вершин многоугольника не более двух, при симметрии относительно которых A переходит в другую вершину многоугольника. Пусть таких вершин 3, — X, Y и Z , а симметричные A относительно них — X', Y' и Z' . При этом пусть луч AY лежит в угле, образованном лучами AX и AZ . Очевидно, Y должна лежать на луче AY между A и пересечением луча AY с отрезком XZ . Тогда Y' либо тоже лежит на этом отрезке, либо лежит внутри четырёхугольника $XX'Y'Y$, то есть не может являться вершиной.

Найдём $2n$ красных точек, получающихся ровно одним способом. Для этого для каждой вершины V многоугольника проведём через неё опорную прямую, не параллельную никакой из сторон многоугольника. Проведём вторую опорную прямую этого направления. Она будет проходить через вершину $W \neq V$. Тогда точка, симметричная V относительно W может получиться только при этой симметрии.

Таким образом получается хотя бы $\frac{2n(2n-1)-2n}{2} + 2n = 2n^2$ точек.

8. *Существует ли непостоянная функция $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(x) + f(y) + f(z) = 1$ для любых положительных x, y, z , удовлетворяющих условию $x + y + z + 1 = 4xyz$?*

Ответ: Существует. **Решение.** Подойдет $f(x) = 1/(2x + 1)$. Условие легко проверить:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} &= 1 \iff \\ \iff (2x+1)(2y+1) + (2y+1)(2z+1) + (2x+1)(2z+1) &= (2x+1)(2y+1)(2z+1) \iff \\ \iff 4(xy + yz + xz) + 4(x + y + z) + 3 &= 8xyz + 4(xy + yz + xz) + 2(x + y + z) + 1 \iff \\ \iff 8xyz - 2(x + y + z) - 2 &= 0 \iff x + y + z + 1 = 4xyz. \end{aligned}$$

9. *Для натуральных чисел $a > b > 1$ можно по крайней мере двумя разными способами подобрать натуральные числа x и y , большие 1, так, что*

$$\frac{a^x - 1}{a - 1} = \frac{b^y - 1}{b - 1}.$$

Докажите, что a и b взаимно просты.

Решение. Предположим противное: у a и b есть общий простой делитель p , и рассмотрим пару (x, y) , удовлетворяющую уравнению из условия. Поскольку $a > b$, имеем $x < y$. Перепишем уравнение в виде

$$a^{x-1} + a^{x-2} + \dots + a + 1 = b^{y-1} + b^{y-2} + \dots + b + 1,$$

или

$$(a^{x-1} - b^{x-1}) + (a^{x-2} - b^{x-2}) + \dots + (a - b) = b^x + b^{x+1} + \dots + b^{y-1}.$$

Левая часть имеет вид $(a - b)(pk + 1)$ с некоторым натуральным k , поэтому содержит p в такой же степени, как $a - b$. С другой стороны, в правой части есть единственное слагаемое b^x , содержащее p в наименьшей степени, поэтому правая часть содержит p в степени ровно в x раз большей, чем b . Отсюда x определяется однозначно, а за ним и y – противоречие.

10. На доске написано несколько различных натуральных чисел. Каждую минуту Вася выбирает какое-нибудь число k , написанное на доске, и каждое число на доске (в том числе k) умножает на k , а результат, увеличенный на 1, записывает на доску. Старые числа Вася стирает. Докажите, что, как бы ни действовал Вася, рано или поздно на доске окажутся числа, ни одно из которых не делится на другое.

Решение. Рассмотрим все возможные пары чисел $a > b$ (их ровно $\frac{C_n^2}{2}$) и будем следить за отношениями $\frac{a}{b}$. После каждой такой операции отношение уменьшится, поскольку при $a > b$ для любого k верно $\frac{a}{b} > \frac{ak + 1}{bk + 1}$. В таком случае среди этих пар не может появиться бесконечного количества целых чисел. Новых пар целым отношением также появиться не может, потому что если $x > y$ то после всех операций это не поменяется.